ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის
სახელმწიფო უნივერსიტეტი

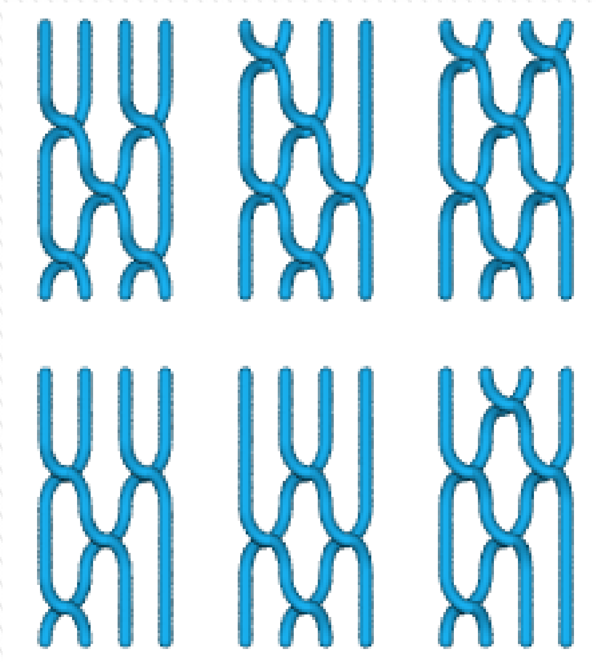
ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

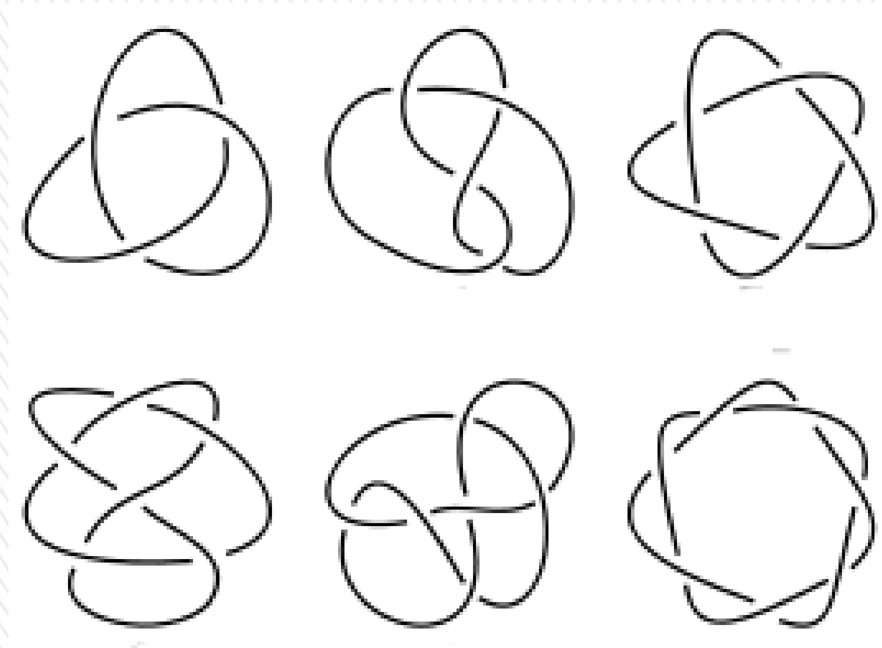
პირველი საფაკულტეტო სამეცნიერო კონფერენცია
ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებებში
მიმართულება: კომპიუტერული მეცნიერებები

დაბალგანზომილებიანი ტოპოლოგიის ალგორითმები: ჰოლონომური წირების აღწერის შესახებ

დოქტორანტი: ვიოლეტა აფხაზავა
სამეცნიერო ხელმძღვანელი: პროფესორი ალექსანდრე გამყრელიძე

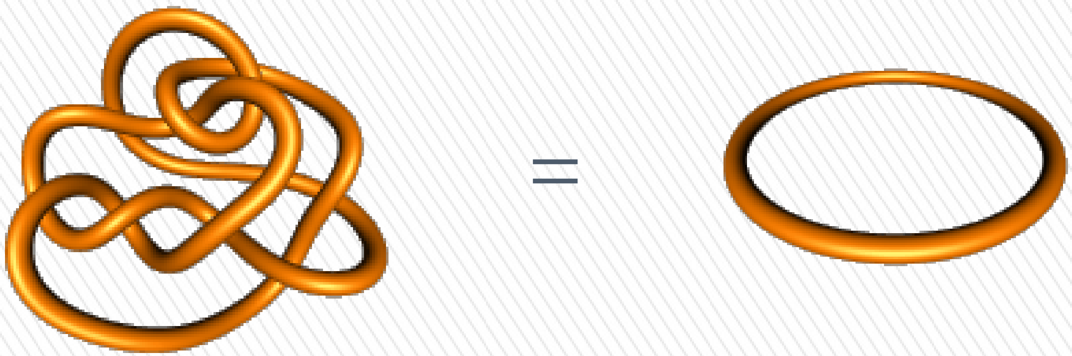
თბილისი
2013 წელი 24 იანვარი

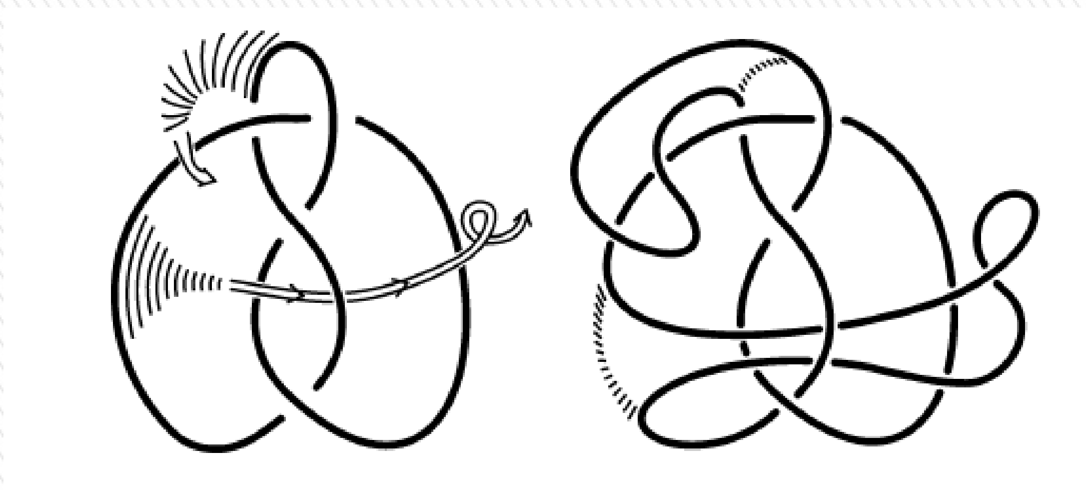




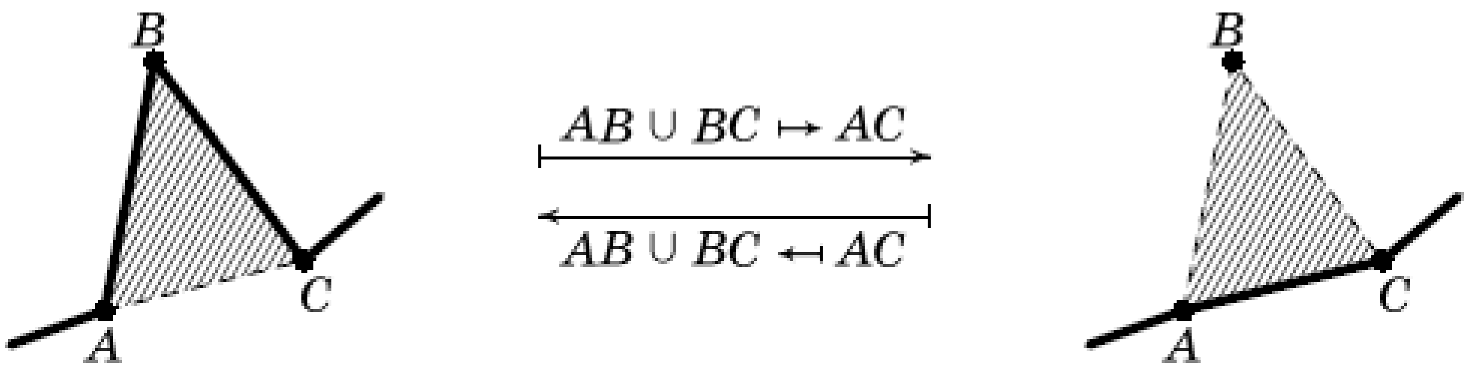
განიხილება უსასრულოდ წვრილი, დრეკადი და წელვადი წირი, რომლის ბოლოები ან უსასრულობაში მიდის, ან შეერთებულია.

ორი კვანძი ეკვივალენტურია, თუ ერთი გაჭრის გარეშე შეიძლება გარდავქმნათ ისე, რომ მივიღოთ მეორე კვანძი

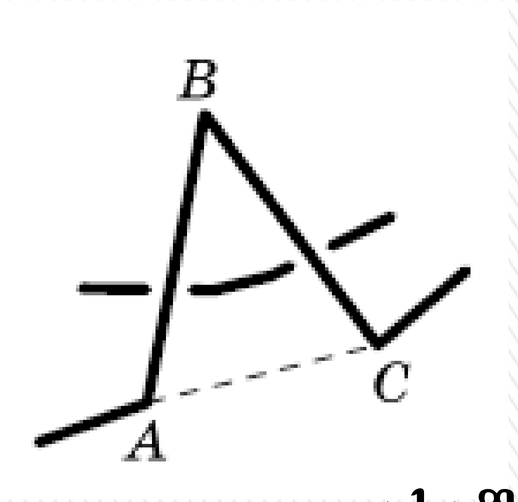


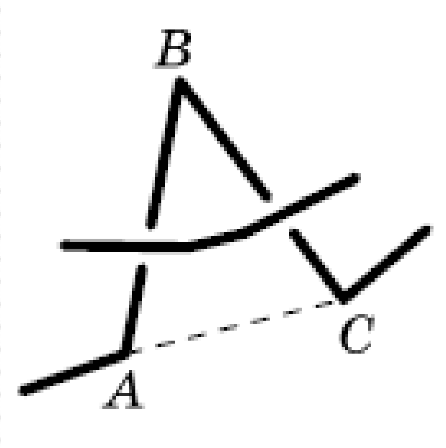


ელემენტარული ოპერაციები

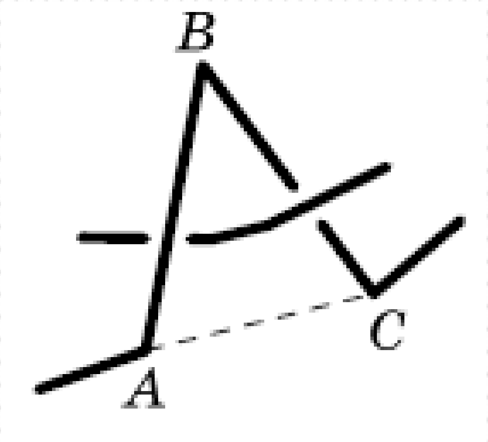


ორი კვანძი ეკვივალენტურია, თუ შესაძლებელია მათი დაყვანა ერთი და იმავე სახეზე ელემენტარული ოპერაციების მეშვეობით



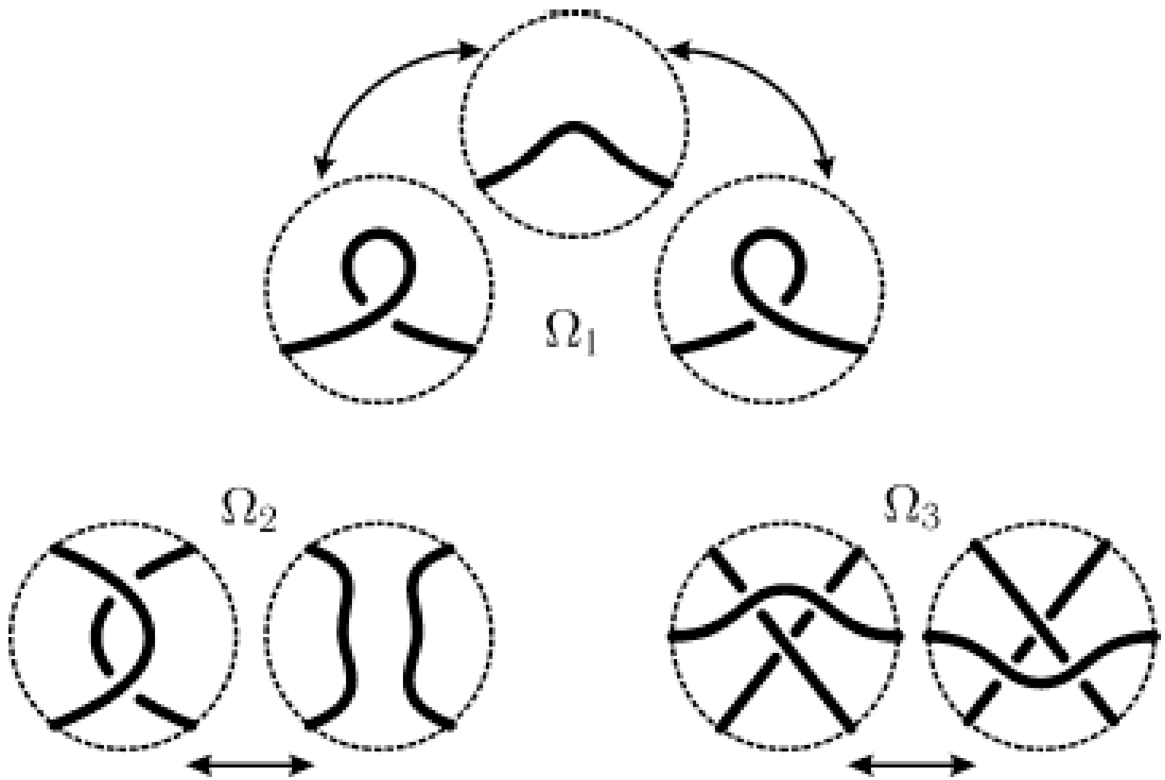


დასაშვები გარდაქმნა



დაუშვებელი გარდაქმნა

რაიდემაისტერის გარდაქმნები



ნებისმიერი შეკრული წირი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ორი არათვითგადამკვეთი ნაწილის გაერთიანების სახით

ნებისმიერი შეკრული წირი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ **AFL** სახით

კვანძების პოლინომური პარამეტრიზაცია

კვანძი წარმოადგენს წერტილის მოძრაობას სივრცეში, რომელიც აღიწერება ამ წერტილის კოორდინატების ცვლილებით:

$$A(t) = (X(t), Y(t), Z(t))$$

ყოველი K კვანძისათვის არსებობს მისი იზოტოპური K' კვანძი და ისეთი $f(t)$ პერიოდული ფუნქცია, რომ:

$$\big(X(t), Y(t), Z(t)\big) = \big(-f(t), f'(t), -f''(t)\big)$$

f ფუნქცია ისეა შერჩეული, რომ:

1. კვანძი სივრცეში არათვითგადამკვეთია –

არ არსებობს ისეთი $t_1, t_2 \in [0, T)$ განსხვავებული წერტილები, რომ

$$\left(-f(t_1), f'(t_1), -f''(t_1)\right) = \left(-f(t_2), f'(t_2), -f''(t_2)\right)$$

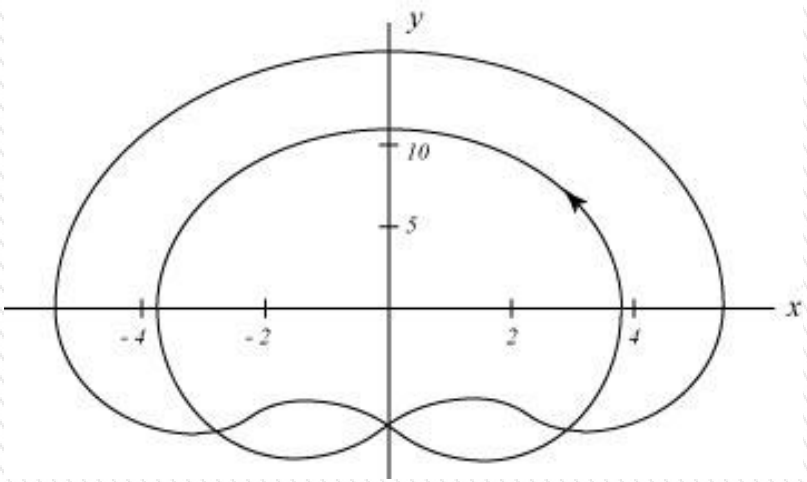
f ᲤᲣᲜᲥᲪᲘᲐ ᲘᲡᲔᲐ ᲨᲔᲠᲩᲔᲣᲚᲘ, ᲠᲝᲛ:

თუ

$$\left(-f(t_1), f'(t_1)\right) = \left(-f(t_2), f'(t_2)\right)$$

მაშინ

$$f'(t_1) \neq 0$$



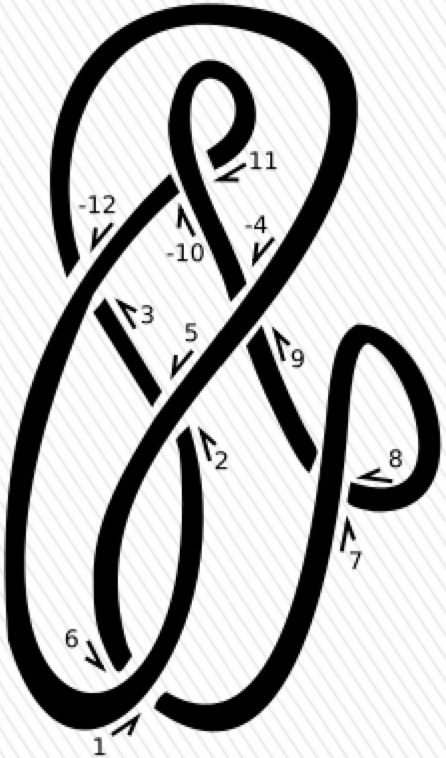
კვანძების თანაკვეთა აბსცისათა ღერძისგან დაცილებულია

f ფუნქცია ისეა შერჩეული, რომ:

3. არ არსებობს ისეთი განსხვავებული

$t_1, t_2, t_3 \in [0, T)$ წერტილები, რომ

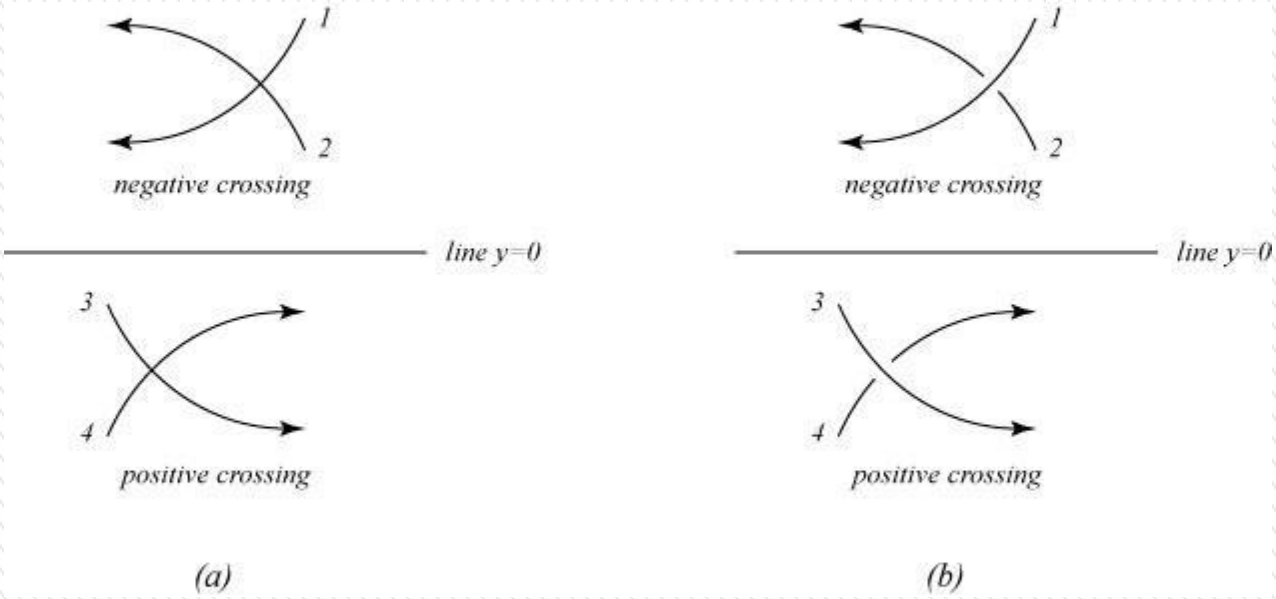
$$\big(-f(t_1), f'(t_1)\big) = \big(-f(t_2), f'(t_2)\big) = \big(-f(t_3), f'(t_3)\big)$$



ერთ წერტილში იკვეთება მხოლოდ ორი მონაკვეთი

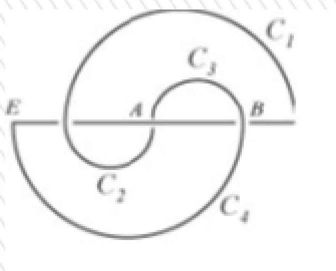
გამომდინარე შედეგები:

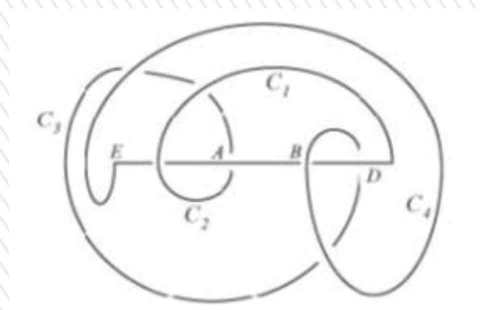
- ჰოლონომური წირი ორიენტირებულია საათის ისრის მოძრაობის მიმართულების საწინააღმდეგოდ;
- ჰოლონომურ წირში დასაშვებია მხოლოდ შემდეგი სახის კვეთები:



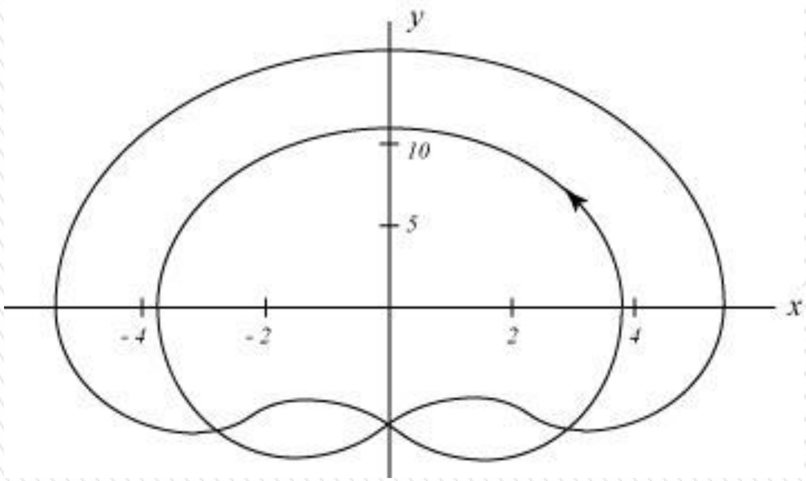
AFL წირის გარდაქმნა ჰოლონომურ სახეზე:

- ***Faden*** ნაწილის გარდაქმნა;
- “ზედმეტი” რკალების მოშორება;
- ***Arkade*** ნაწილის გარდაქმნა;





დღემდე ფორმულებით ჩაწერილია მხოლოდ წრე და სამყურა



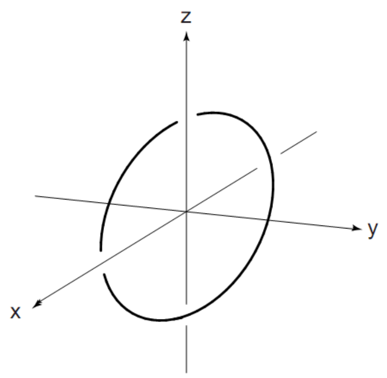
$$f(t) = \sin(t) + 4\sin(2t) + \sin(4t)$$

John Bueti, Michael Kinnally, Felix Tubiana

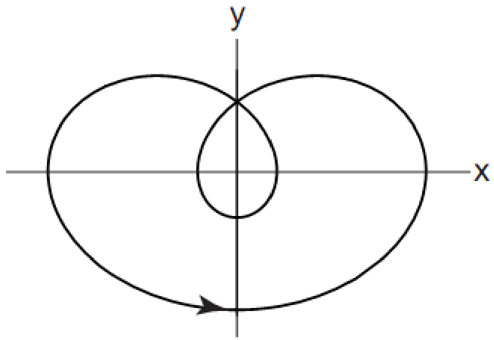
ზოგადად ნებისმიერი ჰოლონომური სახის წირისთვის მახასიათებელი ფუნქციის დაწერის მეთოდი უცნობია

$$f = ?$$

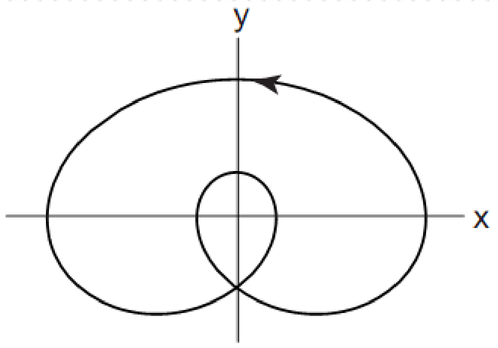
წრეწირის განსხვავებული წარმოდგენები სივრცეში



$f(t) = \cos(t)$



$f_+(t) = \cos(t) + \sin(2t)$



$f_-(t) = \cos(t) - \sin(2t)$

ႼႨႰႨႱ ႠႶႼႤႰႨႱ ႨႣႤႠ

კვანძის თითოეული i-ური რკალი შეიძლება აღიწეროს f_i ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მეშვეობით.

მთელი კვანძი წარმოადგენს f_i ფუნქციების ინტერპოლაციას სპეციალური კოეფიციენტებით

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i * p_i$$

კვადრატული ტალღა

$$S_{A,T} = A * (-1)^{\frac{\lfloor t-t_0 \rfloor}{T}}$$

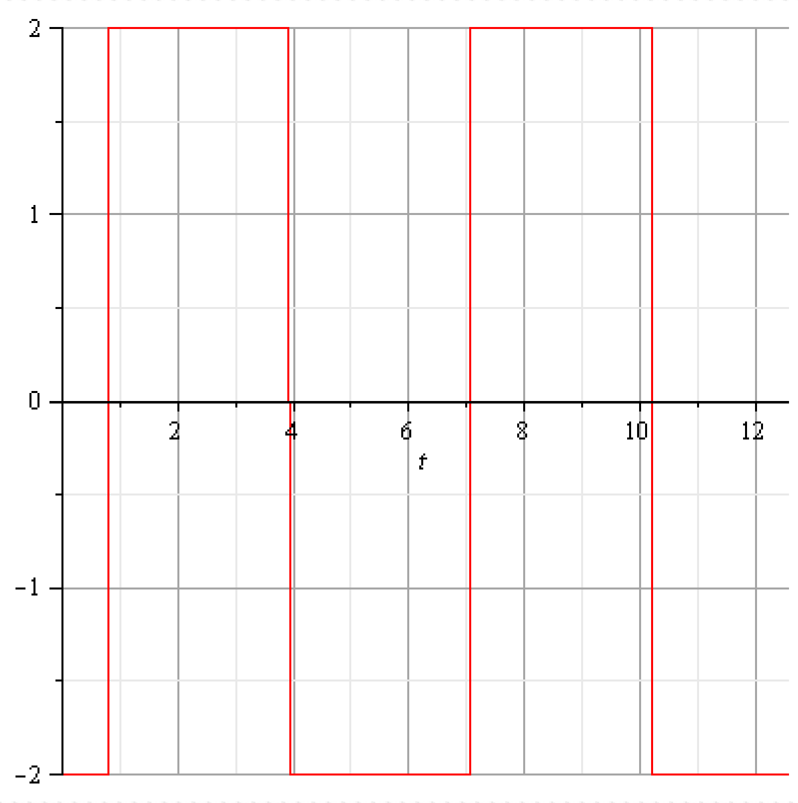
სადაც:

A - ტალღის ამპლიტუდა,

T - პერიოდი,

t დროითი ცვლადი,

t_0 – ტალღის ათვლის დასაწყისი



კვადრატული ტალღის თვისებები

- შესაძლებელია ორი კვადრატული ტალღის ნამრავლით ნებისმიერად შევარჩიოთ ინტერვალის სიგრძე, სადაც ეს ნამრავლი 1-ის ტოლი იქნება, ხოლო პერიოდის დანარჩენ ნაწილზე 0-ის ტოლი.
- კვადრატული ტალღის ფუნქციის წარმოებული 0-ის ტოლია, რის გამოც:

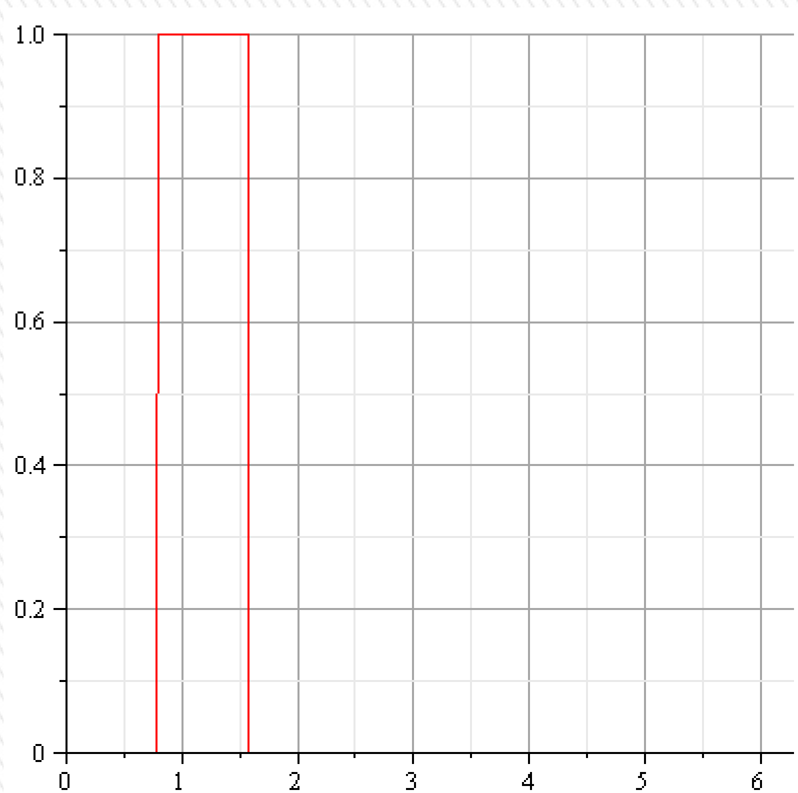
$$\left(f * S_{(A,T)}\right)' = f' * S_{(A,T)}$$

$$\left(f * S_{(A,T)}\right)'' = f'' * S_{(A,T)}$$

- როდესაც f_i ფუნქციები უწყვეტი და წარმოებადია, მაშინ ნამრავლი $f_i * S_{i(A,T)}$ და ამ ნამრავლების ჯამიც ასევე უწყვეტი, წარმოებადი ფუნქციებია.

საინტერპოლაციო კოეფიციენტები

$$p_i = \frac{1}{2} * \left(1 + (-1)^{\frac{\lfloor t - t_{i-1} \rfloor}{T}}\right) * \frac{1}{2} * \left(1 + (-1)^{\frac{\left\lfloor t - \left(t_i - \frac{T}{2}\right) \right\rfloor}{T}}\right)$$



ძირითადი ფუნქციები

$$f_i = a_i * e^{\cos(\propto_i * t)} - a_i * e^{-\cos(\propto_i * t)} + b_i * \cos(\propto_i * t) + c_i$$

სადაც კოეფიციენტები გამოითვლება შემდეგი სისტემიდან:

$$\begin{cases} f_i(x_{i-1}) = a_i * e - a_i * e^{-1} + b_i + c_i = -x_{i-1} \\ f_i(x_i) = a_i * e^{-1} - a_i * e - b_i + c_i = -x_i \\ f'_i\left(\dfrac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) = -a_i * \propto_i - a_i * \propto_i - b_i * \propto_i = h_i \\ f''_i(x_{i-1}) = f''_i(x_i) \\ \qquad = -a_i * \propto_i^2 * e - a_i * \propto_i^2 * e^{-1} - b_i * \propto_i^2 = 0 \end{cases}$$

ფუნქციები შეირჩა შემდეგი მოსაზრებით:

ავტომატურად სრულდება პირობები:

$f'_i(x_{i-1}) = f'_i(x_i) = 0$ და $f''_i(x_{i-1}) = -f''_i(x_i)$

მეორე წარმოებულის 0-თან ტოლობა კვანძით წერტილებში აღებულია გამოთვლების გამარტივების მიზნით.

აბსცისათა ღერძის როლში აღებულია თავდაპირველი AFL წარმოდგენის *Arkade* ნაწილი და, შესაბამისად, x_i წერტილები წარმოადგენს *Faden* ნაწილის *Arkade* ნაწილთან გადაკვეთის წერტილებს.

გარდაქმნილი *Faden* ნაწილის აღწერის შემდეგ *Arkade* ნაწილსაც აღვწერთ ზემოაღნიშნული ფუნქციით, ამდენად, *Arkade* ნაწილი მონაკვეთის ნაცვლად წარმოადგენს რკალს , რომელიც მოშორებულია აბსცისათა ღერძისგან.

მიღებული სისტემიდან გვექნება შემდეგი ტოლობები:

$$(2*a+b)=2*a-a*(e+e^{-1})=-\frac{a}{e}*(e-1)^2$$

$$a=\frac{x0-x1}{4}*e$$

$$(2*a+b)=\frac{x1-x0}{4}*(e-1)^2$$

ამ ტოლობებიდან გამომდინარეობს:

$$\propto=-\frac{h}{2*a+b}=\frac{4*h}{(x0-x1)*(e-1)^2}$$

დავუშვათ, $h=q*(x0-x1)*(e-1)^2$

მაშინ გვექნება: $\propto=4*q$

α განსაზღვრავს შესაბამისი რკალის პერიოდს და სიმაღლეს. შეგვიძლია წირის *ARKADE* და *FADEN* ნაწილებში შევარჩიოთ ორი განსხვავებული α1 და α2, მივიღებთ:

$$T_A = m * \frac{2 * \pi}{\alpha 1}$$

ARKADE ნაწილში

$$T_F = (n - m) * \frac{2 * \pi}{\alpha 2}$$

FADEN ნაწილში.

$\alpha 1$ და $\alpha 2$ უნდა შევარჩიოთ ისე, რომ *ARKADE* ნაწილში რკალების მაქსიმალური სიმაღლე მოდულით ნაკლები იყოს *FADEN* ნაწილში რკალების მინიმალურ სიმაღლეზე მოდულით.

მთლიანი პერიოდი :

$$T = T_A + T_F = 2 * \pi * \left(\frac{m}{\alpha 1} + \frac{n-m}{\alpha 2}\right)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$p = \frac{\alpha 2}{\alpha 1}$$

მივიღებთ:

$$T = 2 * \pi * \frac{n+m*(p-1)}{p*\alpha 1}$$

იმისათვის, რომ შეკრული წირი მთლიანობაში პერიოდული იყოს, საჭიროა, T ზუსტად იყოფოდეს T_A და T_F-ზე, ანუ სიდიდეები:

$$\frac{T}{T_A} = \frac{n + m * (p - 1)}{p}$$ და $$\frac{T}{T_F} = n + m * (p - 1)$$

ნატურალური იყოს, ე. ი. უნდა სრულდებოდეს პირობა:

$$n - m = (l - m) * p$$

გამოთვლებიდან, როგორც შედეგი, გვაქვს შემდეგი ტოლობა:

$$T_A = T_F$$

გარდაქმნილი წირის *ARKADE* და *FADEN* ნაწილები სათითაოდ იკავებენ მთელი პერიოდის ნახევარს

მივიღეთ, თუ სრულდება პირობა:

$$p > \frac{\max\limits_{Arkade} |x_i - x_{i+1}|}{\min\limits_{Faden} |x_j - x_{j+1}|}$$

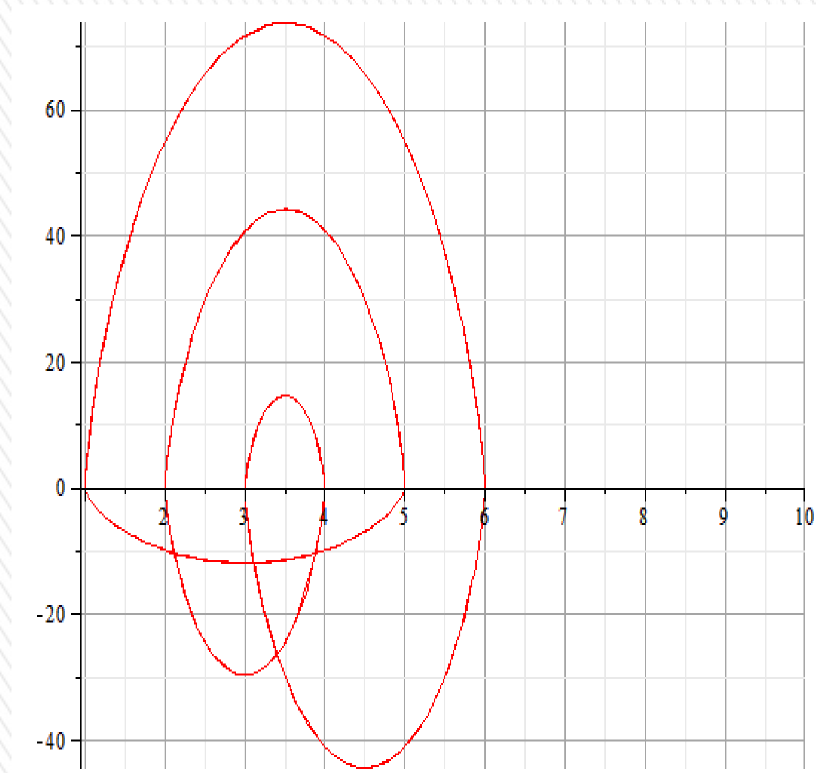
შეგვიძლია ავაგოთ ისეთი წირი, რომ *ARKADE* ნაწილში რკალების მაქსიმალური სიმაღლე მოდულით ნაკლები იყოს *FADEN* ნაწილში რკალების მინიმალურ სიმაღლეზე.

თუ ავიღებთ *l=m+1*, მაშინ *p=n-m*.

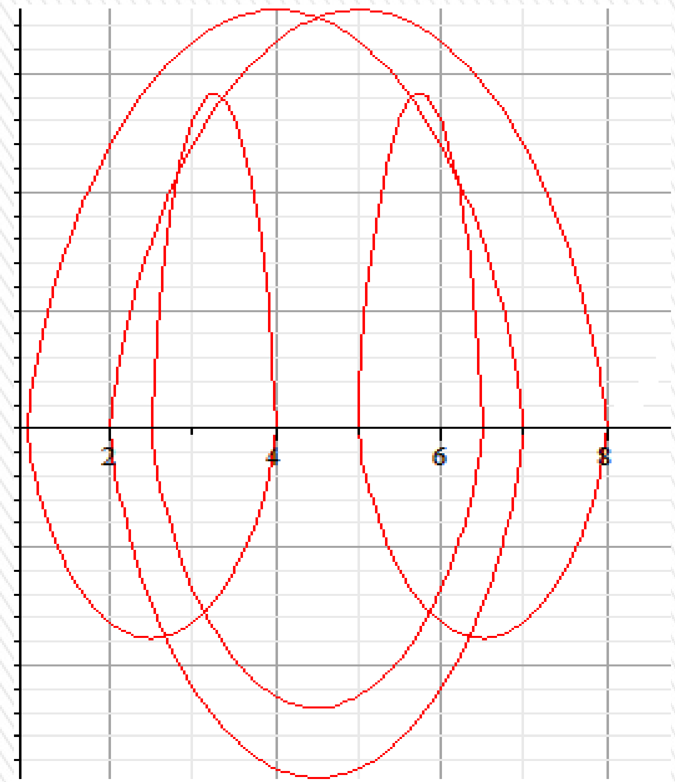
კონკრეტულად, მარცხენა სამყურას შემთხვევაში (ჰოლონომური კვეთები) გვაქვს:

***n=6*, *m=1*, *l=2*, *p=5*.**

მარცხენა სამყურას გარდაქმნითა და შერჩეული ფუნქციით მიღებული გრაფიკი



მარჯვენა სამყურას გარდაქმნითა და შერჩეული ფუნქციით მიღებული გრაფიკი



გმადლობთ ყურადღებისთვის!