რ.გ. სიმრავლეთა შემოსაზღვრულად კვაზი–ხარისხების შესახებ

როლანდ ომანაძე
ელფოსტა: roland.omanadze@tsu.ge
მათემატიკის დეპარტამენტი, ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, ჭავჭავაძის პრ. 3, 0179 თბილისი

ტენენბაუმმა (იხ.[1, გვ.159]) შემოიტანა Q-დაყვანადობის ცნება ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის ქვესიმრავლეთა კლასზე შემდეგნაირად: A სიმრავლე Q–დაყვანადია B სიმრავლეზე (სიმბოლურად: $A \leq_Q B$), თუ არსებობს ისეთი გამოთვლადი ფუნქცია f, რომ ყოველი $x \in \omega$ (სადაც ω აღნიშნავს ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეს), $x \in A \Leftrightarrow W_{f(x)} \subseteq B$. ამ შემთხვევაში ვამბობთ,რომ $A \leq_Q B$ f ფუნქციით.

თუ $A \leq_Q B$ f ფუნქციით და არსებობს ისეთი ფიქსირებული რიცხვი $n \in \omega$, რომ ყოველი – x–სთვის, $|W_{f(x)}| \leq n$, მაშინ ვიტყვით, რომ A სიმრავლე შემოსაზღვრულად Q-დაყვანადია B–ზე (სიმბოლურად: $A \leq_{bQ} B$). რეკურსიულად გადათვლადი (რ.გ.) სიმრავლე A არის bQ-სრული, თუ ყოველი რ.გ. სიმრავლე bQ-დაყვანადია A სიმრავლეზე. bQ-დაყვანადობის მიმართება არის რეფლექსური და ტრანზიტული, ამიტომ, ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის ქვესიმრავლეთა სიმრავლეზე, ის წარმოქმნის ხარისხთა სტრუქტურას.

ჩვენი აღნიშვნები და ტერმინოლოგია არის სტანდარტული და მათი ნახვა შეიძლება [1]–ში.

თეორემა 1. ყოველი არარეკურსიული რ.გ. არასრული bQ-ხარისხისათვის არსებობს მასთან არასადარი არააჩქარებადი bQ-ხარისხი.

შედეგი . რ.გ. სრულ T –ხარისხში შემავალ არააჩქარებად bQ-ხარისხებს შორის არ არის მაქსიმალური bQ-ხარისხი.

არარეკურსიულ X სიმრავლეს ეწოდება რეკურსიულად განცალებადი (მოკლედ: r-განცალებადი), თუ ყოველი რ.გ. Y სიმრავლისათვის

$$Y \cap X = \emptyset \Rightarrow (\exists R \text{ რეკურსიული})(X \subseteq R \;\&\; Y \cap R = \emptyset).$$

თეორემა 2. ვთქვათ A და B არიან რ.გ. სიმრავლეები და A არის r-განცალებადი სიმრავლე. თუ $A \leq_{bQ} B$, მაშინ არსებობს ისეთი არარეკურსიული რ.გ. სიმრავლე C, რომ $C \leq_m A$ & $C \leq_m B$.

შედეგი. ვთქვათ M არის მაქსიმალური სიმრავლე და A არის რ.გ. სიმრავლე. მაშინ $M \leq_{bQ} A \Rightarrow M \leq_m A$.

თეორემა 3. bs–ხარისხების სტრუქტურა $\mathfrak{D}_{bs}$ არაა ელემენტარულად ექვივალენტური არც be –ხარისხების სტრუქტურის $\mathfrak{D}_{be}$ და არც e–ხარისხების სტრუქტურის $\mathfrak{D}_{e}$.

შედეგი. bQ–ხარისხების სტრუქტურა $\mathfrak{D}_{bQ}$ არაა ელემენტარულად ექვივალენტური არც be –ხარისხების სტრუქტურის $\mathfrak{D}_{be}$ და არც e–ხარისხების სტრუქტურის $\mathfrak{D}_{e}$.

ნაშრომი შესრულებულია შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდის მხარდაჭერით (გრანტები: # GNSF/ST09_144_3-105, # GRANT/ST09_270_3-105, # GNSF/CNRS09/09).

[1] H.Rogers, Theory of recursive functions and effective computability. McGraw-Hill Book Co., New York, 1967.